Université de Versailles - Saint Quentin — **Année 2017/2018**
M1 Théorie de Galois — **Maria Chlouveraki**

Morphismes d'extensions - TD 7

1. Soit F un corps fini avec $|F| = p^n$ où p est un nombre premier. Montrer que F est le corps de décomposition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_p[x]$ de degré n.

2. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(E)$ pour
(a) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(b) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(c) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.
(d) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.
(e) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
(f) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.
(g) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$.
(h) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.
(i) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
(j) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3})$.
(k) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
(l) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}, i)$.
(m) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{6}})$.
(n) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{6}}, \sqrt{5}i)$.

3. Soit Ω une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_3$, et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_3}(E, \Omega)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3}(E)$.

4. Soit Ω une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_3(t)$, et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 - t^2 - t - 1 \in \mathbb{F}_3(t)[x]$. Déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_3(t)}(E, \Omega)$ et $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3(t)}(E)$.

5. Dans tous les exemples des Exercices 1–4 déterminer si les extensions sont séparables, normales ou galoisiennes.

6. Soient $F \subseteq K \subseteq E$ des corps tels que E/F est finie. Montrer que :
(a) Si E/F est séparable, alors E/K et K/F sont séparables.
(b) Si E/K et K/F sont séparables, alors E/F séparable.
(c) Si E/F est normale, alors E/K est normale.
(d) L'extension K/F est normale si et seulement si $\varphi(K) = K$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(E, \Omega)$.

7. Soit F un corps. Montrer que le polynôme $f(x) := x^n - 1_F \in F[x]$ est séparable si et seulement si $\mathrm{car}\, F$ ne divise pas n. Dans ce cas là, soit E le corps de décomposition de $f(x)$. Montrer que :
(a) E/F est galoisienne.
(b) $\mathrm{Aut}_F(E)$ est un groupe abélien.
(c) Si n est un nombre premier, $\mathrm{Aut}_F(E)$ est un groupe cyclique.
(d) Si $n = 8$, $\mathrm{Aut}_F(E)$ n'est pas un groupe cyclique.